一般選抜入試（前期日程）
数学（理系型）

担当：竹本（研伸館）

＜構成と試験時間＞

・試験時間６０分

・記述式

・大問３問構成

＜数学（１）の試験範囲＞

数学Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ

数学A（図形の性質・場合の数と確率）

数学B（数列）

数学C（ベクトル・平面上の曲線と複素数平面）

＜数学（２）の試験範囲＞

数学Ⅰ・Ⅱ

数学A（図形の性質・場合の数と確率）

数学B（数列）

数学C（ベクトル）

Ⅰ　次の問いに答えなさい。

(1)　次の２式が成り立つ実数 $a,\ r$ の組をすべて求めなさい。

$$\begin{cases} a+ar+ar^2=21 \\ a^2r+a^2r^2+a^2r^3=126 \end{cases}$$

(2)　不等式 $\log_{11}\{\log_2(x+24)\}<1$ を解きなさい。

(3)　k を実数とする。２つのベクトル $\vec{a}=(k,\ 1,\ -1),\ \vec{b}=(1,\ -1,\ -k)$ のなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ となるときの, k の値を求めなさい。

Ⅰ　次の問いに答えなさい。

(1)　次の２式が成り立つ実数 $a,\ r$ の組をすべて求めなさい。

$$\begin{cases} a+ar+ar^2=21 \\ a^2r+a^2r^2+a^2r^3=126 \end{cases}$$

Ⅰは小問集合

・基本公式の確認

・典型的な基礎問題の理解が重要

(2)　不等式 $\log_{11}\{\log_2(x+24)\}<1$ を解きなさい。

(3)　k を実数とする。２つのベクトル $\vec{a}=(k,\ 1,\ -1),\ \vec{b}=(1,\ -1,\ -k)$ の

なす角が $\dfrac{\pi}{3}$ となるときの，k の値を求めなさい。

(1)　次の２式が成り立つ実数 $a,\ r$ の組をすべて求めなさい。

$$\begin{cases} a+ar+ar^2=21 \\ a^2r+a^2r^2+a^2r^3=126 \end{cases}$$

等比数列の和の公式でもよいが・・・

→　公比による場合分けが面倒

→　第１式の左辺をar倍すると第２式の左辺になるのでこれを利用

(1)　次の 2 式が成り立つ実数 $a,\ r$ の組をすべて求めなさい。

$$\begin{cases} a+ar+ar^2=21 \\ a^2r+a^2r^2+a^2r^3=126 \end{cases}$$

$a+ar+ar^2=21$ の両辺を ar 倍すると

$$a^2r+a^2r^2+a^2r^3=21ar$$

となることから

$$21ar=126$$

$$ar=6$$

これを上の式に代入して

$$a+6+6r=21$$

$$a=15-6r$$

a を消去して

$$r(15-6r)=6$$

$$6r^2-15r+6=0$$

$$2r^2-5r+2=0$$

$$(2r-1)(r-2)=0$$

$$r=\frac{1}{2},\ 2$$

$$(a,\ r)=(3,\ 2),\ \left(12,\ \frac{1}{2}\right)$$

(2)　不等式 $\log_{11}\{\log_2(x+24)\} < 1$ を解きなさい。

＜Point＞

対数を含む式では

①底の条件・・・１以外の正の数

　真数条件・・・正の数　→　忘れていませんか？？

②底を統一する

③logとlogを比べる形に　→　今回はこっち

or

おきかえ

(2)　不等式 $\log_{11}\{\log_2(x+24)\} < 1$ を解きなさい。

真数条件より

$$x+24>0 \text{ かつ } \log_2(x+24) > 0 = \log_2 1$$

底が 1 より大きいことから

$$x > -24 \text{ かつ } x+24 > 1$$

$$x > -23$$

このとき

$$\log_{11}\{\log_2(x+24)\} < \log_{11} 11$$

となり、底は 1 より大きいことから

$$\log_2(x+24) < 11 = \log_2 2^{11}$$

底は 1 より大きいので

$$x+24 < 2048$$

ゆえに

$$-23 < x < 2024$$

＜Point＞

$a > 1$ のとき

$\log_a M > \log_a N$ ならば $M > N$

$0 < a < 1$ のとき

$\log_a M > \log_a N$ ならば $M < N$

(3) k を実数とする。2つのベクトル $\vec{a} = (k, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, -k)$ の

なす角が $\frac{\pi}{3}$ となるときの, k の値を求めなさい。

＜Point＞

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ は $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$　（ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$）

(3) k を実数とする。2つのベクトル $\vec{a} = (k, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, -k)$ のなす角が $\frac{\pi}{3}$ となるときの, k の値を求めなさい。

$$|\vec{a}| = \sqrt{k^2 + 2}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{k^2 + 2}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2k - 1$$

であるから

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{2k-1}{k^2+2}$$

$$k^2 + 2 = 2(2k - 1)$$
$$k^2 - 4k + 4 = 0$$
$$k = 2$$

Ⅱ　座標平面上において, y 軸に平行な m 本の直線 $x = k$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$ と, x 軸に平行な n 本の直線 $y = \ell$ $(\ell = 1, 2, \cdots, n)$ を考える。これらの直線で作られる, 次の図形の総数を求めなさい。

(1)　$m = 3, n = 4$ のときの四角形

(2)　$m = 5, n = 6$ のときの, 点 $(1, 1)$ を頂点に含まない四角形

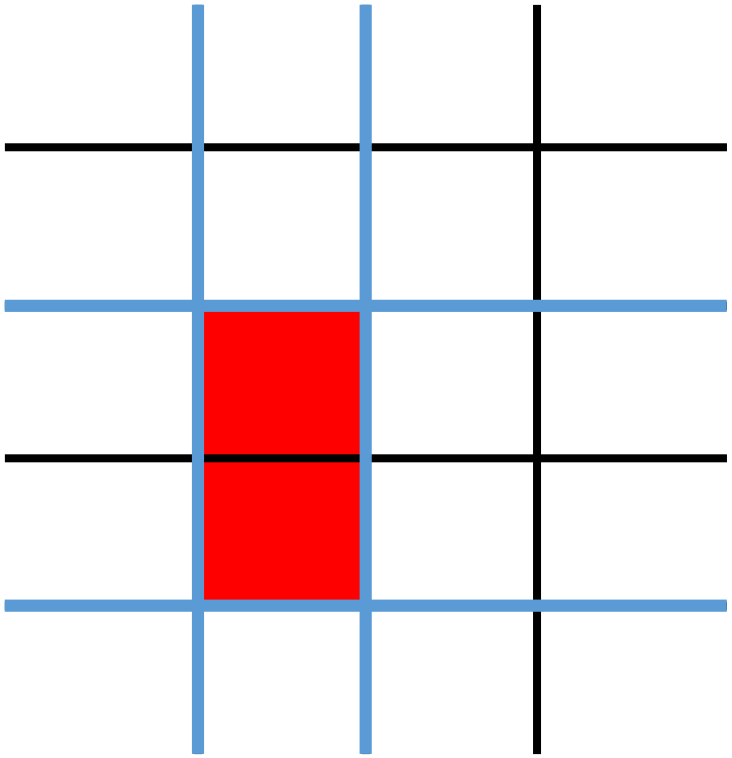
(3)　$m = 5, n = 6$ のときの正方形

Ⅱは１単元からの出題

・設定の理解

・標準問題への落とし込みが重要

(1)　$m = 3, n = 4$ のときの四角形

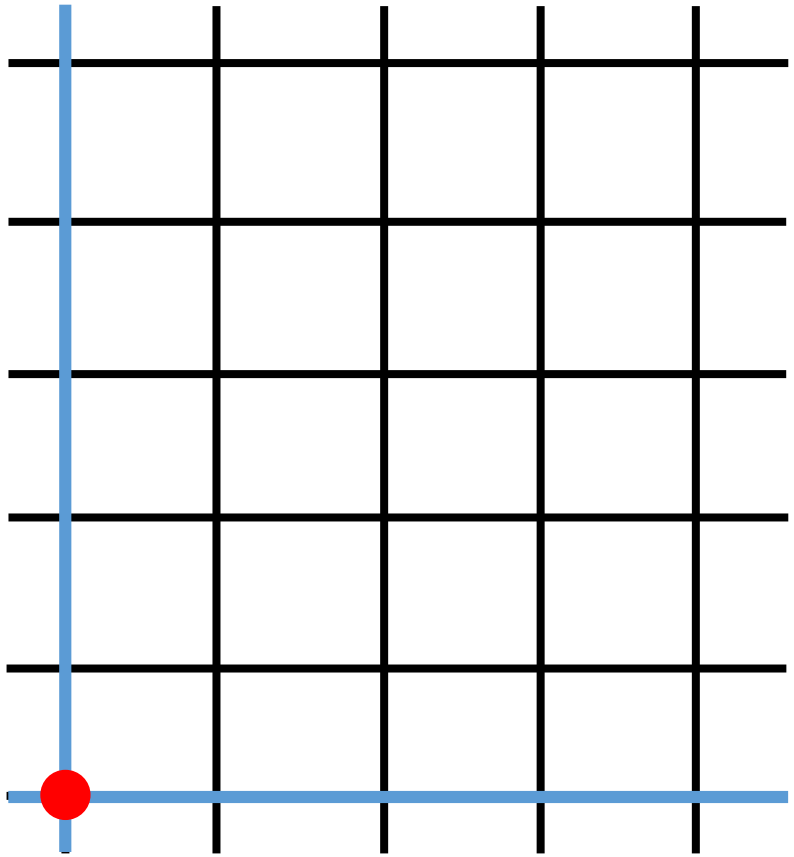


$${}_3\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 18 \text{ 通り}$$

２本の縦線と

２本の横線を選べばよい！

(2)　$m = 5, n = 6$ のときの, 点 $(1, 1)$ を頂点に含まない四角形



点(1,1)を含む＝この２本は確定

→　**残りの直線から縦・横１本ずつ選ぶ**

$(1,\ 1)$ を含むものは

$${}_4\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1 = 20 \text{ 通り}$$

←除くもの！
（答えではない）

全体の総数は

$${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_2 = 150 \text{ 通り}$$

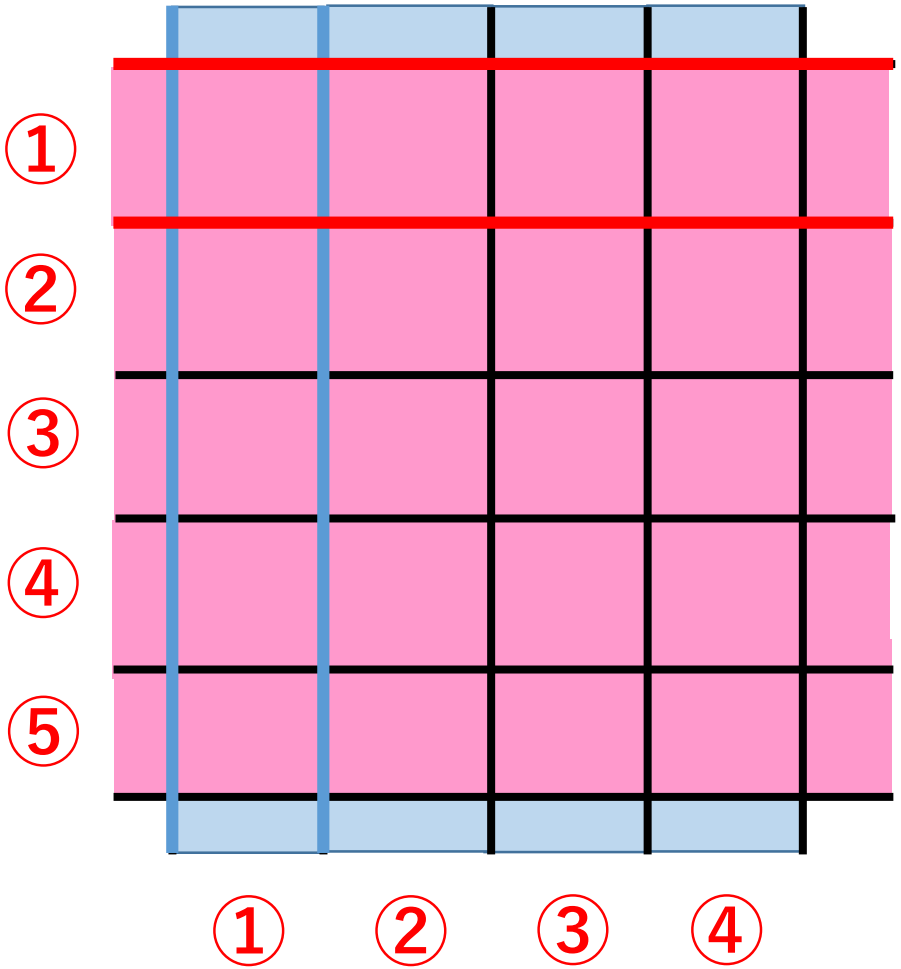
よって

$$150 - 20 = 130 \text{ 通り}$$

(3)　$m = 5, n = 6$ のときの正方形　→　**縦と横の幅が同じ＝辺の長さに注目**

1辺の長さが1　→　縦線の幅は1

→　横線の幅も1



1辺の長さが1のものは

$(5-1)\times(6-1)=20$ 通り

1辺の長さが2のものは

$(5-2)\times(6-2)=12$ 通り

1辺の長さが3のものは

$(5-3)\times(6-3)=6$ 通り

1辺の長さが4のものは

$(5-4)\times(6-4)=2$ 通り

1辺の長さが5以上になることはないので

$20+12+6+2=40$ 通り

Ⅲ　$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で関数 $f(x) = x\sin x$ を考える。

(1)　$f(x)$ の増減を調べ, 最大値と最小値を求めなさい。

(2)　曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

Ⅲは数Ⅲから出題

・極限・微分・積分の計算力

・基礎問題から標準問題の理解が重要

Ⅲ $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で関数 $f(x) = x\sin x$ を考える。 → **対称性を考える！**

(1) $f(x)$ の増減を調べ, 最大値と最小値を求めなさい。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

＜Point＞

$f(-x) = f(x)$　　$y = f(x)$ は y 軸に関して対称

$f(-x) = -f(x)$　　$y = f(x)$ は 原点 に関して対称

Ⅲ　$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で関数 $f(x) = x\sin x$ を考える。

(1)　$f(x)$ の増減を調べ, 最大値と最小値を求めなさい。

$$f(-x) = -x\sin(-x) = x\sin x = f(x)$$

であるから、$y = f(x)$ は y 軸に関して対称である。

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ として考える。

$$f'(x) = \sin x + x\cos x \geqq 0$$

より $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で $f(x)$ は単調増加である。

ゆえに、対称性から増減表は以下の通り。

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	↘	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

最大値　$\frac{\pi}{2}$　　最小値　0

Ⅲ　$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で関数 $f(x) = x\sin x$ を考える。

(2)　曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

(1) より、対称性から求める面積は以下の通り。→　**右半分の面積の２倍**

$$2\left\{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx\right\}$$

ここで

$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x + C\ (C \text{ は積分定数})$$

であるから　→　**部分積分**

$$2\left\{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx\right\} = \frac{\pi^2}{2} - 2\left[-x\cos x + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - 2$$

Ⅲ　関数 $y = \sin\theta + \cos\theta + \sin 2\theta$ について，次の問いに答えなさい。

(1)　$\sin\theta + \cos\theta = t$ とおく。y を t で表しなさい。

(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，y のとりうる値の範囲を求めなさい。

Ⅲは１単元からの出題

・設定の理解

・標準問題への落とし込みが重要

Ⅲ　関数 $y = \sin\theta + \cos\theta + \sin 2\theta$ について，次の問いに答えなさい。

$2\sin\theta\cos\theta$

(1)　$\sin\theta + \cos\theta = t$ とおく。y を t で表しなさい。

→　**tを2乗して作る！**

$$t^2 = (\sin\theta + \cos\theta)^2$$

$$t^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$$

$$2\sin\theta\cos\theta = t^2 - 1$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

よって

$$y = \sin\theta + \cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= t^2 + t - 1$$

Ⅲ　関数 $y=\sin\theta+\cos\theta+\sin 2\theta$ について，次の問いに答えなさい。

(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，y のとりうる値の範囲を求めなさい。

$$y=t^2+t-1$$
$$=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

→　**tの範囲を求める**

$$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$　←　**合成**

となり、$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ より

$$\frac{\pi}{4} \leqq \theta+\frac{\pi}{4} \leqq \frac{9}{4}\pi$$

より

$$-1 \leqq \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$$
$$-\sqrt{2} \leqq \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$$
$$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

よって

$t=\sqrt{2}$ のとき　最大値 $1+\sqrt{2}$

$t=-\frac{1}{2}$ のとき　最小値 $-\frac{5}{4}$

以上より

$$-\frac{5}{4} \leqq y \leqq 1+\sqrt{2}$$

研伸館