【問題】

2次方程式 $2x^2 - x + 3 = 0$ の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とするとき, 次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2 + \beta^2$

(2) $\alpha^3 + \beta^3$

(3) $\dfrac{\alpha^2}{\beta} + \dfrac{\beta^2}{\alpha}$

☆ 2次方程式が複雑な解 $\alpha,\ \beta$ をもつとき, $\alpha,\ \beta$ の対称式の値は？

$\Longrightarrow$ 解と係数の関係

$ax^2 + bx + c = 0$ の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とするとき,

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

☆ 対称式 ($\alpha^2 + \beta^2,\ \alpha^3 + \beta^3$など) は $\alpha + \beta, \alpha\beta$ で表すことができる

【解答】

$2x^2 - x + 3 = 0$ について

解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{1}{2} \\ \alpha\beta = \frac{3}{2} \end{cases}$$

(1)＊対称式に注目

$$\alpha^2 + \beta^2$$
$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{3}{2}$$
$$= \frac{1}{4} - 3 = -\frac{11}{4}$$

(2)＊対称式に注目

$$\alpha^3 + \beta^3$$
$$= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{8} - \frac{9}{4} = -\frac{17}{8}$$

(3)＊(2)の値を利用しよう。

$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$$
$$= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta}$$
$$= \frac{-\frac{17}{8} \times 8}{\frac{3}{2} \times 8} = \frac{-17}{12}$$

【問題】

和が 1, 積が 2 となるような 2 数を求めよ。

☆ 和と積から元の 2 数を求めるには？

$\Longrightarrow x^2 - (\text{和})x + (\text{積}) = 0$ を利用

【解答】　＊「解から方程式の逆算」の発想を利用する。

$x = \alpha, \beta$

$(x-\alpha)(x-\beta) = 0$

$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$

条件より，

$\alpha+\beta = 1$，$\alpha\beta = 2$

$x^2 - x + 2 = 0$ は，

α，β を 2 解とする 2 次方程式

の 1 つである

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$

【問題】

次の条件を満たすように, 定数 a, b の値を求めよ。

$4x^3+ax^2+bx+1$ を $x+1$ で割ると -2 余り, $2x-1$ で割ると 4 余る。

☆ 1次式で割ったときの余り

$\Longrightarrow$ 剰余の定理

$$\begin{cases} f(x) \text{ を } x-\alpha \text{ で割ったときの余りは } f(\alpha) \\ f(x) \text{ を } ax+b \text{ で割ったときの余りは } f\left(-\dfrac{b}{a}\right) \end{cases}$$

【解答】　＊(割られる式)＝(割る式)×(商)＋(余り) の形で考える。

$f(x)=4x^3+ax^2+bx+1$ とする

商を $P(x)$, $Q(x)$ とおく.

$f(x)=(x+1)P(x)-2$ より, $f(-1)=-2$ …①

$f(x)=(2x-1)Q(x)+4$ より, $f\left(\frac{1}{2}\right)=4$ …②

①より, $-4+a-b+1=-2$ $\leftrightarrow$ $a-b=1$ …③

②より, $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+1=4$

$\leftrightarrow$ $\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b=\frac{5}{2}$ $\leftrightarrow$ $a+2b=10$ …④

③, ④より, $a=4$, $b=3$

【問題】

次の方程式を解け.

$$2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$$

☆ 高次方程式はまず $f(\alpha) = 0$ を満たす α をみつける

$\Longrightarrow$ このとき $f(x)$ は $x - \alpha$ を因数にもつ (因数定理)

$$\alpha\text{の候補} = \pm\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の係数の約数}}$$

【解答】　＊解の候補を見極めてから、代入していこう。

$x=2$ を代入して、$2\times 2^3 + 2^2 - 13\times 2 + 6 = 0$

よって、$x=2$ は $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$ の解である

$(x-2)(2x^2+5x-3) = 0$

$(x-2)(2x-1)(x+3) = 0$

$\therefore x = 2, \frac{1}{2}, -3$

$$\begin{array}{r|l} x-2 & 2x^2+5x-3 \\ \hline & 2x^3+x^2-13x+6 \\ & 2x^3-4x^2 \\ \hline & 5x^2-13x \\ & 5x^2-10x \\ \hline & -3x+6 \\ & -3x+6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

【問題】

x の方程式 $x^3+ax^2+bx-3=0$ の解の 1 つが $1-\sqrt{2}i$ であるとき, 実数 a, b の値および, 残りの解を求めよ。

☆ 様々な別解がある問題。今回は, 解と係数の関係を利用。

【解答】 ＊「実数係数の方程式より」という記述は必ず書こう。

実数係数の方程式より, $1-\sqrt{2}i$ が解のとき,
$1+\sqrt{2}i$ も解である

残りの1つの実数解を γ とする

解と係数の関係より,

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2}i)+(1+\sqrt{2}i)+\gamma=-a \\ (1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)+(1+\sqrt{2}i)\gamma+\gamma(1-\sqrt{2}i)=b \\ (1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)\gamma=3 \end{cases}$$

($(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)=3$)

より, $\gamma=1$, $3+2\gamma=b$, $2+\gamma=-a$

なので, $a=-3$, $b=5$

残りの解は, 3, $1+\sqrt{2}i$

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq0)$
の3解を α, β, γ として

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

$(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)$
$=1^2-(\sqrt{2}i)^2$
$=1+2=3$