【問題】

2 次方程式 $2x^2 - x + 3 = 0$ の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とするとき, 次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2 + \beta^2$

(2) $\alpha^3 + \beta^3$

(3) $\dfrac{\alpha^2}{\beta} + \dfrac{\beta^2}{\alpha}$

☆ 2 次方程式が複雑な解 $\alpha,\ \beta$ をもつとき, $\alpha,\ \beta$ の対称式の値は？

$\Longrightarrow$ 解と係数の関係

$ax^2 + bx + c = 0$ の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とするとき,

$\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

☆ 対称式 ($\alpha^2 + \beta^2,\ \alpha^3 + \beta^3$など) は $\alpha + \beta, \alpha\beta$ で表すことができる

【問題】

和が 1, 積が 2 となるような 2 数を求めよ。

☆ 和と積から元の 2 数を求めるには？

$\Longrightarrow x^2 - (\text{和})x + (\text{積}) = 0$ を利用

【問題】

次の条件を満たすように, 定数 $a,\ b$ の値を求めよ。

$4x^3+ax^2+bx+1$ を $x+1$ で割ると -2 余り, $2x-1$ で割ると 4 余る。

☆ 1 次式で割ったときの余り

$\Longrightarrow$ 剰余の定理

$$\begin{cases} f(x) \text{ を } x-\alpha \text{で割ったときの余りは } f(\alpha) \\ f(x) \text{ を } ax+b \text{で割ったときの余りは } f\left(-\dfrac{b}{a}\right) \end{cases}$$

【問題】

次の方程式を解け.

$$2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$$

☆ 高次方程式はまず $f(\alpha) = 0$ を満たす α をみつける

$\Longrightarrow$ このとき $f(x)$ は $x - \alpha$ を因数にもつ (因数定理)

$$\alpha\text{の候補} = \pm\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の係数の約数}}$$

【問題】

x の方程式 $x^3+ax^2+bx-3=0$ の解の 1 つが $1-\sqrt{2}i$ であるとき, 実数 a, b の値および, 残りの解を求めよ。

☆ 様々な別解がある問題。今回は, 解と係数の関係を利用。