【問題】

方程式 $x^2-2x-2y+5=0$ で表された放物線の焦点の座標と準線の方程式を求めよ。

☆ 1定点と1定直線から等距離にある点の軌跡は？

$\Longrightarrow$ 放物線 $\left(\begin{array}{l} y^2=4px \text{ のとき,} \\ 1\text{定点 (焦点) は } (p,\ 0) \\ 1\text{定直線 (準線) は } x=-p \end{array}\right)$

$x^2-2x-2y+5=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-1-2y+5=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=2y-4$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=2(y-2)$ …②

これは放物線 $x^2=2y$ …① を x 軸方向に $+1$, y 軸方向に $+2$ だけ平行移動したものである

なので、①の焦点は $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$

準線は $y=-\frac{1}{2}$

②の焦点は、$\left(1,\ \frac{5}{2}\right)$

準線は、$y=\frac{3}{2}$

【問題】

楕円 $3x^2+4y^2-12x=0$ の焦点の座標および長軸, 短軸の長さを求めよ。

☆ 2定点からの距離の和が一定となる点の軌跡は？

$$\Longrightarrow \text{楕円}\left(\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)\ \text{のとき},\\ \text{2定点 (焦点) は}\begin{cases}(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0) & (a>b\ \text{のとき})\\ (0,\ \pm\sqrt{b^2-a^2}) & (a<b\ \text{のとき})\end{cases}\\ \text{距離の和 (長軸の長さ) は}\begin{cases}2a & (a>b\ \text{のとき})\\ 2b & (a<b\ \text{のとき})\end{cases}\end{array}\right)$$

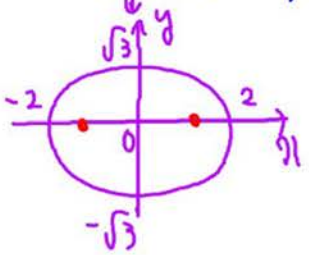
$3x^2+4y^2-12x=0$

$3(x-2)^2-12+4y^2=0$

$3(x-2)^2+4y^2=12$

$\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ……②

これは，だ円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ……① を x 軸方向に $+2$ だけ平行移動したもの



①の焦点は，

$(\pm\sqrt{4-3},\ 0)$

$=(\pm 1,\ 0)$ なので

②の焦点は，$(3,\ 0),\ (1,\ 0)$

長軸の長さは 4

短軸の長さは $2\sqrt{3}$

【問題】

双曲線 $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$ の焦点の座標, 漸近線の方程式を求めよ。

☆ 2定点からの距離の差が一定となる点の軌跡は？

$$\Longrightarrow \text{双曲線} \left(\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1 \quad (a>0,\ b>0) \text{ のとき,} \\ \text{2定点 (焦点) は} \begin{cases} (\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0) & \left(\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \text{ のとき}\right) \\ (0,\ \pm\sqrt{a^2+b^2}) & \left(\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1 \text{ のとき}\right) \end{cases} \\ \text{距離の差 (2頂点間の距離) は} \begin{cases} 2a & \left(\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \text{ のとき}\right) \\ 2b & \left(\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1 \text{ のとき}\right) \end{cases} \\ \text{漸近線は } y = \pm\dfrac{b}{a}x \end{array} \right)$$

$9x^2-4y^2-18x-16y-43=0$

$9(x-1)^2-9-4(y+2)^2+16-43=0$

$9(x-1)^2-4(y+2)^2=36$

$\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$ …②

これは、$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ …①

のグラフを、x軸方向に+1

y軸方向に-2

だけ平行移動したもの

①の焦点は $(\pm\sqrt{13},\ 0)$

なので、②の焦点は、$(1\pm\sqrt{13},\ -2)$

①の漸近線は、$y=\pm\dfrac{3}{2}x$

②の漸近線は、$y=\pm\dfrac{3}{2}(x-1)-2$

【問題】

双曲線 $x^2 - 4y^2 = 4$ の接線で, 点 $(2, 3)$ を通るものを求めよ。

☆ 2次曲線上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線

- $y^2 = 4px \Longrightarrow y_0 y = 2p(x + x_0)$
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$
- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1 \Longrightarrow \dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y_0 y}{b^2} = \pm 1$

接点を (s,t) とする

接線の方程式は,

$\frac{sx}{4} - ty = 1$ …①

これが $(2,3)$ を通るので

$\frac{s}{2} - 3t = 1$ …③

ここで, $s^2 - 4t^2 = 4$ …②

③より, $s = 6t + 2$ であり, ②に代入して

$(6t+2)^2 - 4t^2 = 4$

$36t^2 + 24t + 4 - 4t^2 = 4$

$32t^2 + 24t = 0$

$t(4t+3) = 0$ $\therefore t = 0, -\frac{3}{4}$

③より, $(s,t) = (2,0), \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

よって, 接線の方程式は, $x = 2$

$5x - 6y = -8$

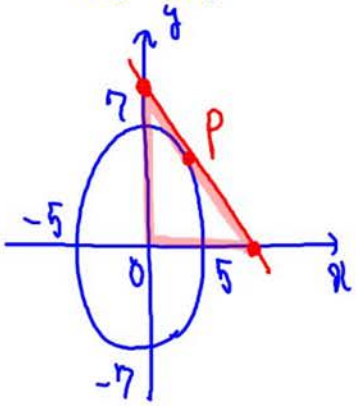
【問題】

楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{49}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における接線と x 軸と y 軸とでできる三角形の面積の最小値を求めよ。

☆ 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点のパラメータ (媒介変数) 表示は？

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$$

$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{49}=1$



$P(5\cos\theta,\ 7\sin\theta)\quad\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

として、Pにおける接線の方程式は、

$\dfrac{\cos\theta}{5}x+\dfrac{\sin\theta}{7}y=1$

$x=0$として、$y=\dfrac{7}{\sin\theta}$

$y=0$として、$x=\dfrac{5}{\cos\theta}$ なので、

三角形の面積をSとして、$S=\dfrac{7}{\sin\theta}\times\dfrac{5}{\cos\theta}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{35}{\sin 2\theta}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より、$0<2\theta<\pi$ なので、$\sin 2\theta$ の最大値は 1

Sの最小値は $\dfrac{35}{1}=35$