【問題】

次の式の展開式において，［　］内の項の係数を求めよ。

(1)　$(3x+2y)^5$　$[x^2y^3]$

(2)　$\left(3x+\dfrac{2}{x}\right)^5$　$[x]$

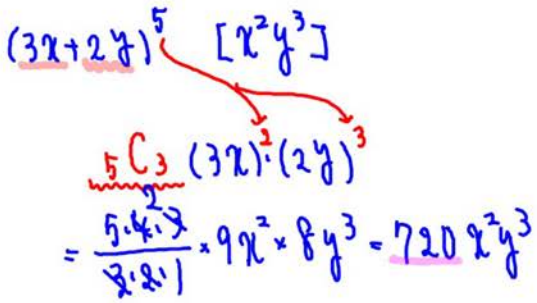
☆　二項定理の利用

①　$(a+b)^n$ を展開する。

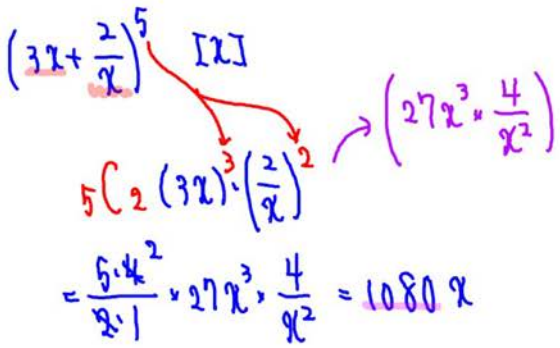
②　$(a+b)^n$ の項をピンポイントで求める。

【解答】

(1)＊イメージは指数の数字の振り分け。



(2)＊イメージは指数の数字の振り分け。



【問題】

次の分数式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-xy+y^2} \times \dfrac{x^3+y^3}{x^2-2xy+y^2} \div \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$

(2) $\dfrac{2x-1}{x^2-1} - \dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$

☆ $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$

☆ 式の通分をするには？

$\Longrightarrow$ 分母を因数分解して，分母の最小公倍数で通分

【解答】

(1)＊計算の前に「因数分解」

$$\frac{x^3-y^3}{x^2-xy+y^2} \times \frac{x^3+y^3}{x^2-2xy+y^2} \div \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$$

①因数分解できるかどうかを考える

$$= \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2-xy+y^2} \times \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)^2} \times \frac{(x+y)(x-y)}{x^2+xy+y^2}$$

$$= (x+y)^2$$

(2)＊通分の前に「因数分解」

$$\frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

$$= \frac{2x-1}{(x+1)(x-1)} - \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \frac{(2x-1)(x-3)-(x-2)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}$$

(分子)について

$2x^2-7x+3-(x^2-x-2)$

$= x^2-6x+5$

$$= \frac{(x-1)(x-5)}{(x+1)(x-1)(x-3)} = \frac{x-5}{(x+1)(x-3)}$$

【問題】

$a+b+c=0$ のとき, 等式 $a^3+b^3+c^3=3abc$ が成り立つことを証明せよ。

☆ 等式 $A=B$ の証明は？

$\Longrightarrow$ ① $A=\cdots\cdots=B$

② $B=\cdots\cdots=A$

③ $\begin{cases} A=\cdots\cdots=C \\ B=\cdots\cdots=C \end{cases}$

よって, $A=B$

④ $A-B=\cdots\cdots=0$

よって, $A=B$

☆ 等式の条件式はどう使う？

$\Longrightarrow$ 文字消去に使う

【証明】＊(左辺)ー(右辺)＝　・・・・　＝0 を示す。条件式は文字消去に利用。

$\underset{A}{a^3+b^3+c^3}-\underset{B}{3abc}$

$=a^3+b^3+\{-(a+b)\}^3-3ab\{-(a+b)\}$

$=a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+3a^2b+3ab^2$

$=0$

よって, $a^3+b^3+c^3=3abc$

【問題】

不等式 $a>0,\ b>0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り立つことを証明せよ。

☆ 不等式 $A \geqq B$ の証明は

$A-B=\cdots\cdots=C \geqq 0$　※ C は $(\quad)^2$ の形にすることが多い

となることを示す

根号 や $|\quad|$ があるときは，2乗して考える。

【証明】 ＊相加平均・相乗平均の関係の証明

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-(\sqrt{ab})^2$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-ab$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{4} \geqq 0$$

$a>0,\ b>0$ より，$\dfrac{a+b}{2}>0,\ \sqrt{ab}>0$ なので

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \geqq 0 \iff \frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

（等号成立条件は，$a=b$ のとき）

【問題】

$x>0$ のとき, $x+\dfrac{9}{x}$ の最小値を求めよ。また, そのときの x の値を求めよ。

☆ 掛けたら文字が消える式の最小

$\Longrightarrow$ 相加相乗平均の関係を利用

※等号成立条件を忘れないこと

【解答】 ＊相加平均・相乗平均の関係を利用した最大最小問題。

$x>0$ より $\dfrac{9}{x}>0$ なので,

$x+\dfrac{9}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{9}{x}} = 6$

(x が a, $\dfrac{9}{x}$ が b, $2\sqrt{ab}$)

等号成立は, $x=\dfrac{9}{x} \Leftrightarrow x^2=9$

$x>0$ より, $x=3$ のとき,

$x+\dfrac{9}{x}$ は $x=3$ のとき, 最小値 6

$a>0$, $b>0$ のとき,

$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

等号成立は, $a=b$ のとき

$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$

の形で利用