【問題】

次の方程式, 不等式を解け。

(1)　$4^x - 2^{x+1} - 48 = 0$

(2)　$\left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2 < 0$

☆ 指数方程式・不等式の目標の形

$$\Longrightarrow \begin{cases} a^{\triangle} = a^{\square} \Leftrightarrow \triangle = \square \\ a^{\triangle} < a^{\square} \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathrm{i}) \quad a > 1 \text{ のとき}, \quad \triangle < \square \\ (\mathrm{ii}) \quad 0 < a < 1 \text{ のとき}, \quad \triangle > \square \end{cases} \end{cases}$$

(1)＊目標の形を目指そう！

$4^x - 2^{x+1} - 48 = 0$

$(2^x)^2 - 2 \times 2^x - 48 = 0$

$2^x = t$ として, $t > 0$

$t^2 - 2t - 48 = 0$

$(t+6)(t-8) = 0$

$t = -6, 8$

$t > 0$ より, $t = 8$

$2^x = 8$

$2^x = 2^3$ ◎目標の形

$\therefore x = 3$

(2)＊0 < (底) < 1 のときは, 不等号の向きを逆にする。

$\left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2 < 0$

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2 < 0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$ として, $t > 0$

$t^2 + t - 2 < 0$

$(t-1)(t+2) < 0$

$t > 0$ より, $t+2 > 0$ なので,

$t - 1 < 0 \Leftrightarrow t < 1$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x < 1$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^0$

$0 < \frac{1}{3} < 1$ より　$x > 0$

【問題】

$1 \leqq x \leqq 3$ のとき, 関数 $y = 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8$ の最大値, 最小値および, そのときの x の値を求めよ。

☆ $\begin{cases} a^p a^q = a^{p+q} \\ (a^p)^q = a^{pq} \end{cases}$

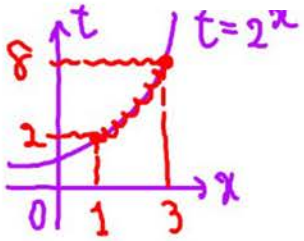
☆ 最大・最小で置き換えをしたら？

$\Longrightarrow$ 新しい文字の範囲チェック

$y = 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 \quad (1 \leqq x \leqq 3)$

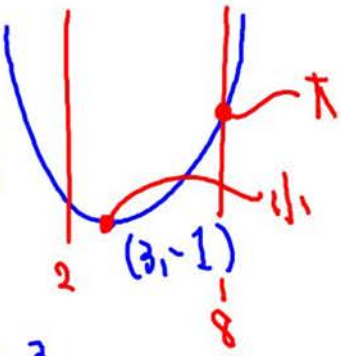
$= (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8$

$2^x = t$ とおく, $2 \leqq t \leqq 8$



$y = t^2 - 6t + 8$

$= (t-3)^2 - 1$



最大値 24 $(x=3)$

$t=8$ とき, $2^x = 8$

$2^x = 2^3$ より $x=3$

最小値 -1 $(x = \log_2 3)$

$t=3$ のとき, $2^x = 3$

$\log_2 2^x = \log_2 3$

$x = \log_2 3$

【問題】

次の不等式を解け。

$$\log_2(x+2)+\log_{\frac{1}{4}}(1-x)>1$$

☆ 対数方程式・不等式で最初と最後に必ず確認することは？

$\Longrightarrow$ 底および真数の条件

☆ 対数方程式・不等式の目標の形

$$\Longrightarrow \begin{cases} \log_a \triangle = \log_a \square \Leftrightarrow \triangle = \square \\ \log_a \triangle < \log_a \square \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathrm{i}) \quad a>1 \text{ のとき}, \quad \triangle < \square \\ (\mathrm{ii}) \quad 0<a<1 \text{ のとき}, \quad \triangle > \square \end{cases} \end{cases}$$

真数条件より $x+2>0$ かつ $1-x>0$ より $-2<x<1$ …①

$\log_2(x+2)-\frac{1}{2}\log_2(1-x)>\log_2 2$ $\log_{\frac{1}{4}}(1-x)$

$2\log_2(x+2)-\log_2(1-x)>2\log_2 2$ $=\dfrac{\log_2(1-x)}{\log_2\frac{1}{4}}$ 2^{-2}

$2\log_2(x+2)>\log_2(1-x)+2\log_2 2$ $=-\frac{1}{2}\log_2(1-x)$

$\log_2(x+2)^2>\log_2(1-x)+\log_2 2^2$

$\log_2(x+2)^2>\log_2 4(1-x)$

底 $2>1$ なので，$(x+2)^2>4(1-x)$

$\Leftrightarrow x^2+8x>0$

$\Leftrightarrow x(x+8)>0$

$x<-8,\ 0<x$

①より，$0<x<1$

【問題】

関数 $f(x)=(\log_2 8x)^2-2\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2x}$ $(1\leqq x\leqq 8)$ の最大値および最小値を求めよ。

☆
$$\begin{cases}\log_a MN=\log_a M+\log_a N\\ \log_a M^r=r\log_a M\\ \log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}\ \text{(底の変換公式)}\end{cases}$$

☆ 最大・最小で置き換えをしたら？

$\Longrightarrow$ 新しい文字の範囲チェック

$f(x)=(\log_2 8x)^2-2\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2x}\quad(1\leqq x\leqq 8)$

$(\log_2 8x)^2=(\log_2 8+\log_2 x)^2$

$=(\log_2 x+3)^2=(\log_2 x)^2+6\log_2 x+9$

$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2x}=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}2x$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_2 2x}{\log_2\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\log_2 2x=-\frac{1}{2}(\log_2 2+\log_2 x)$

$\left(\frac{1}{2}=2^{-1}\right)$

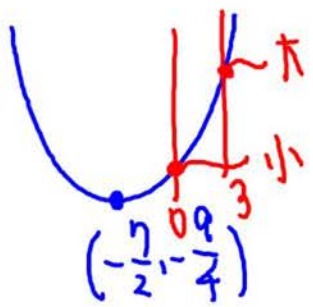
$=-\frac{1}{2}(\log_2 x+1)$

$f(x)=(\log_2 x)^2+6\log_2 x+9+\log_2 x+1$

$=(\log_2 x)^2+7\log_2 x+10$

$\log_2 x=t$ とおく、$g(t)=t^2+7t+10=\left(t+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

$1\leqq x\leqq 8$ より、$0\leqq t\leqq 3$



最大値 40

最小値 10

【問題】

$\log_{10} 2 = 0.3010,\ \log_{10} 3 = 0.4771$ として, 次の問いに答えよ。

15^{10} は何桁の数か。

$10^2 = 100$ ← 3桁で最小

$10^3 = 1000$ ← 4桁で最小

$\log_{10} 15^{10} = 10 \log_{10} 15$ (3×5)

$= 10(\log_{10} 3 + \log_{10} 5)$

$\log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - \log_{10} 2$

$= 10(\log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2)$

$= 10(0.4771 + 1 - 0.3010)$

$= 11.761$

より, $11 \leqq \log_{10} 15^{10} < 12$

$\log_{10} 10^{11} \leqq \log_{10} 15^{10} < \log_{10} 10^{12}$

$10^{11} \leqq 15^{10} < 10^{12}$ (13桁)

なので, 15^{10} は12桁

$10\underbrace{\cdots 0}_{11コ}$

12桁