【問題】

関数 $f(x)=x^3-x$ について, 以下の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ 上の点 $(2,\ 6)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ 上の接線のうち点 $(1,\ -1)$ を通るものを求めよ。

☆ ～における接線, ～を通る接線の違いは？

$\Longrightarrow$ ～における接線：「～」は必ず接点
～を通る接線：「～」は接点とは限らない

(1)

$f(x)=x^3-x$ より, $f'(x)=3x^2-1$ なので,

傾きは, $f'(2)=3\times2^2-1=11$

接線の方程式は

$y=11(x-2)+6$

$=11x-16$

直線の方程式

傾き m, 通る1点 $(p,\ q)$

$y=m(x-p)+q$

(2)

接点を $(t,\ t^3-t)$ とする

$f(x)=x^3-x$ より, $f'(x)=3x^2-1$ なので,

接線の方程式は, $y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t$

$=(3t^2-1)x-2t^3$ ……①

$(1,-1)$ を通るので, $-1=(3t^2-1)\times1-2t^3$

$\Leftrightarrow 2t^3-3t^2=0$

$\Leftrightarrow t^2(2t-3)=0$

$t=0,\ \frac{3}{2}$

$-2\times\left(\frac{3}{2}\right)^3$

$=-2\times\frac{27}{8}$

①より, $y=-x$, $y=\frac{23}{4}x-\frac{27}{4}$

【問題】

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は, $x=1$ で極大値 5 をとり, $x=3$ で極小値をとる。定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

☆ $f(x)$ が $x=a$ で極値をとる必要十分条件とは？

$\Longrightarrow$ $f'(x)$ の符号が $x=a$ の前後で変化する

※ $f'(\alpha)=0$ を用いて解いたときは十分性のチェックをすること

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

条件より、$f'(1)=0$、$f'(3)=0$、$f(1)=5$ はaで

$$\begin{cases} 3+2a+b=0 \\ 27+6a+b=0 \\ 1+a+b+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=9 \\ c=1 \end{cases}$$

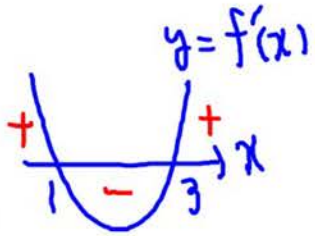
必ず確認

ここで、$f'(x)=3x^2-12x+9$

$=3(x-1)(x-3)$

増減表は、

x		1		3	
f'	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗



したがって、$x=1$ で極大、$x=3$ で極小となる。

【問題】

関数 $f(x)=x^3-3x^2-9x-a$ について以下の問いに答えよ。

方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつときの定数 a の値の範囲を求めよ。

☆ $f(x)=a$ の実数解の個数は？

$\Longrightarrow y=f(x)$ と $y=a$ の共有点の個数

$f(x)=x^3-3x^2-9x-a$

$f(x)=0 \longleftrightarrow x^3-3x^2-9x-a=0$

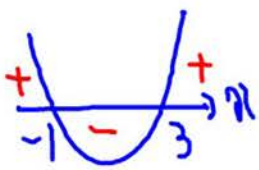
$\longleftrightarrow x^3-3x^2-9x=a$

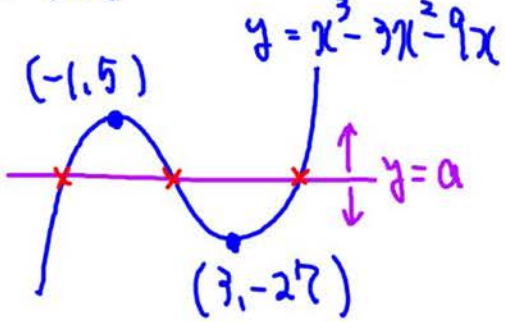
$\begin{cases} y=x^3-3x^2-9x \\ y=a \end{cases}$ のグラフの共有点を考える

$y'=3x^2-6x-9$

$=3(x+1)(x-3)$

x		-1		3	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	5	↘	-27	↗





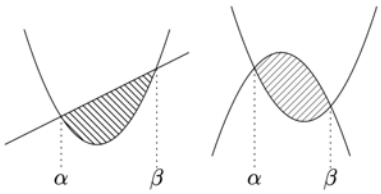
グラフより、条件をみたすのは

$-27<a<5$

【問題】

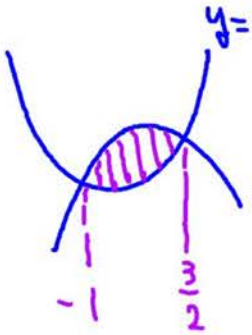
次の曲線によって囲まれた部分の面積を求めよ.

$$y = x^2 + x - 1,\ y = -x^2 + 2x + 2$$

☆ 

の面積を求めるときに使える公式は？

$$\Longrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$



$\begin{cases} y = x^2 + x - 1 \\ y = -x^2 + 2x + 2 \end{cases}$ より,

$x^2 + x - 1 = -x^2 + 2x + 2$ （下 = 上）

$2x^2 - x - 3 = 0$ （下 − 上）

$(2x-3)(x+1) = 0$

$x = \frac{3}{2}, -1$

面積は $\int_{-1}^{\frac{3}{2}} \{(-x^2+2x+2) - (x^2+x-1)\}dx$ （上 − 下）

$= -\int_{-1}^{\frac{3}{2}} (2x-3)(x+1)dx$

$= -2\int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left(x - \frac{3}{2}\right)(x+1)dx = -2 \times \left\{-\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}+1\right)^3\right\}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{125}{8} = \frac{125}{24}$

【問題】

次の関係式をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x + \int_0^2 f(t)dt$$

$\int_0^2 f(t)dt = k$ (k は定数) とおく ①

ここで、$f(x) = x + k$ とおける

$k = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 (t+k)dt$ ②

$= \left[\frac{1}{2}t^2 + kt\right]_0^2$

$= 2 + 2k$

なので、$k = 2 + 2k$ $\Leftrightarrow$ $k = -2$

$\therefore f(x) = x - 2$