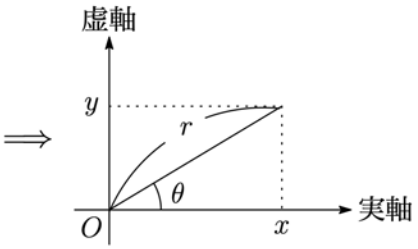
【問題】

次の値を極形式で表せ。

$$\left(\frac{\sqrt{3}+3i}{1+i}\right)^{10}$$

☆ $x+yi$ を $r(\cos\theta+i\sin\theta)$　(極形式) で表すには？



☆ $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\ z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき

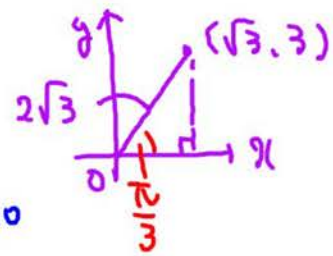
$$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

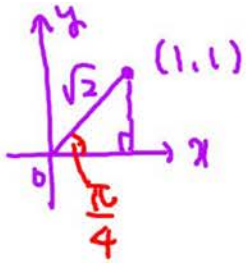
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

☆ ド・モアブルの定理とは？

$\Longrightarrow (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$　(n：整数)

$\left(\frac{\sqrt{3}+3i}{1+i}\right)^{10}$





$$=\left\{\frac{2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\right\}^{10}$$

$$=\left\{\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right\}^{10}$$

$$=(\sqrt{6})^{10}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{10}$$

$$=6^5\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$

【問題】

次の方程式を解け。

$$z^5 = 1$$

☆ n 乗根を求めるには？

$\Longrightarrow$ 求める複素数を $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおく

☆ $r(\cos\theta + i\sin\theta) = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi \end{cases} \quad (k：整数)$$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$

$z^5 = 1$ より、$r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = \cos 0 + i\sin 0$

なので、 $r^5 = 1$

$5\theta = 0 + 2m\pi$ (mは整数)

$r>0$ より、$r = 1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$, $\theta = \frac{2}{5}m\pi$ より、$\theta = 0, \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi$

したがって、$z = \cos 0 + i\sin 0$, $\cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi$

$\cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi$, $\cos\frac{6}{5}\pi + i\sin\frac{6}{5}\pi$

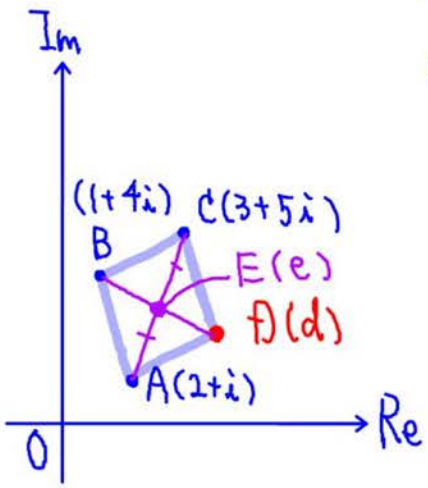
$\cos\frac{8}{5}\pi + i\sin\frac{8}{5}\pi$

【問題】

3 点 $\mathrm{A}(2+i)$, $\mathrm{B}(1+4i)$, $\mathrm{C}(3+5i)$ について, 次の点を表す複素数を求めよ。

四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 D, およびその対角線の交点 E。

☆ 複素数の和, 差, 定数倍, 分点については, ベクトルと同じように扱うことができる。
公式, 図形的意味も！



D(d) として,

四角形 ABCD が平行四辺形になるので,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$d-(2+i) = (3+5i)-(1+4i)$

$d = (2+i)+(3+5i)-(1+4i)$

$= 4+2i$

E(e) として, 点 E は 2 点 A, C の中点より,

$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$ なので

$e = \frac{1}{2}\{(2+i)+(3+5i)\}$

$= \frac{5}{2}+3i$

【問題】

複素数平面上の 3 点 A, B が表す複素数をそれぞれ α, β とする。

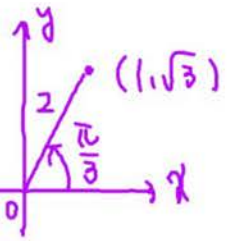
α, β が 以下の関係式を満たしているとき, 三角形 OAB はどのような三角形か。

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i$$

☆ $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(w)$ とするとき,

$$\frac{w}{z} = r\{\cos(\pm\theta) + i\sin(\pm\theta)\} \text{ ならば } \begin{cases} \mathrm{OP} : \mathrm{OQ} = 1 : r \\ \angle \mathrm{POQ} = \theta \end{cases}$$

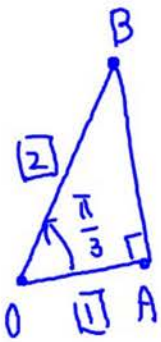
$\frac{\beta}{\alpha} = 1+\sqrt{3}i$ →



$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ → $\beta = \alpha \times 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$|\beta| = |\alpha| \times 2$

$\arg\beta = \arg\alpha + \frac{\pi}{3}$



なので、 $\mathrm{OA} : \mathrm{OB} = 1 : 2$

$\angle \mathrm{BOA} = \frac{\pi}{3}$, $\angle \mathrm{OAB} = \frac{\pi}{2}$

の直角三角形となる

【問題】

点 z が原点 O を中心に半径 1 の円周上を動くとき, 次の等式を満たす点 w はどのような図形をえがくか。

$$w = \frac{iz - 1}{z - 1}$$

☆ 点 z の軌跡

- $|z - \alpha| = |z - \beta| \Longrightarrow$ 2 点α, βを結ぶ線分の垂直二等分線
- $|z - \alpha| = r \Longrightarrow$ 中心α, 半径r の円

$w = \dfrac{iz-1}{z-1}$

$(z-1)w = iz - 1$

$(w-i)z = w - 1$

$w \neq i$ として, $z = \dfrac{w-1}{w-i}$

条件より $|z| = 1$ なので

$\left|\dfrac{w-1}{w-i}\right| = 1$

$|w-1| = |w-i|$

点 w は 2 点 1, i を結ぶ線分の垂直2等分線上を動く