【問題】

第 4 項が 17, 第 9 項が 7 である等差数列について, 以下の問いに答えよ。

(1)　一般項を求めよ。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか．またそのときの最大値を求めよ。

☆ 等差数列の一般項および和の公式は？

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_n = (\text{初項}) + (n-1)(\text{公差}) \\ S_n = \dfrac{1}{2}(\text{項数})\{(\text{初項}) + (\text{末項})\} \end{cases}$$

(1)

初項を a_1, 公差を d として, $a_4 = 17$ より $a_1 + 3d = 17$ …①

$a_9 = 7$ より, $a_1 + 8d = 7$ …②

①, ②より, $d = -2$, $a_1 = 23$

一般項は, $a_n = 23 + (n-1) \times (-2)$

$= -2n + 25$

(2)

$a_n = -2n + 25 \geqq 0$

$\Leftrightarrow n \leqq \dfrac{25}{2} \ (= 12.5)$

なので, 初項から第12項までの和が最大となる

(23)

$a_{12} = -2 \times 12 + 25 = 1$ であり,

和は $\dfrac{12}{2}(23 + 1) = 144$

【問題】

初項から第 3 項までの和が 26, 初項から第 6 項までの和が 728 である等比数列の一般項を求めよ。

☆ 等比数列の一般項および和の公式は？

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_n = (\text{初項})(\text{公比})^{n-1} \\ S_n = \dfrac{(\text{初項})\{(\text{公比})^{(\text{項数})} - 1\}}{(\text{公比}) - 1} \quad \text{ただし, } (\text{公比}) \neq 1 \end{cases}$$

初項 a_1, 公比 r とする　（$\{a_n\}$: $a_1, a_1, a_1, \cdots$）

(i) $r=1$ のとき, 条件より, $3a_1 = 26$

$6a_1 = 728$

これより, 条件をみたす a_1 は存在しない

(ii) $r \neq 1$ のとき, 条件より, $\dfrac{a_1(r^3-1)}{r-1} = 26$ …①

$\dfrac{a_1(r^6-1)}{r-1} = 728$ …②

$(r^3+1)(r^3-1)$

②より, $\dfrac{a_1(r^3-1)}{r-1} \times (r^3+1) = 728$

①より, $26 \times (r^3+1) = 728$

$r^3 + 1 = 28$

$r^3 = 27$　∴ $r = 3$

$26 \overline{)728}$ → 28, 52, 208, 208, 0

①より, $\dfrac{a_1(3^3-1)}{3-1} = 26$　より, $a_1 = 2$

∴ $a_n = 2 \times 3^{n-1}$

【問題】

次の和を計算せよ。

$$\sum_{k=1}^{n} k^2(2k+1)$$

☆ $\sum$ (3 次式以下)

$$\Longrightarrow \sum \text{公式} \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2(2k+1) = \sum_{k=1}^{n} (2k^3+k^2)$$

$$= 2\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{2}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)\left\{3n(n+1)+(2n+1)\right\}$$

$3n^2+3n+2n+1 = 3n^2+5n+1$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(3n^2+5n+1)$$

【問題】

次の和を計算せよ。

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$$

☆ $\sum \frac{1}{(2\text{次式})}$

$\Longrightarrow \frac{1}{(小)(大)} = □\left(\frac{1}{小} - \frac{1}{大}\right)$ と変形して足す

$$\frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2}\right) = \frac{3}{(3k-1)(3k+2)}$$

(つぎに) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2}\right)$ ←項の残り方は「対称性あり」

$$= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) \qquad \frac{3n+2-2}{2(3n+2)}$$

$$= \frac{3n}{6(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$$

【問題】

初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = n^3$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

☆ 和から一般項を求めるには？

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1 = S_1 \\ n \geqq 2 \text{ のとき, } a_n = S_n - S_{n-1} \end{cases}$$

$n \geq 2$ のとき、 $a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^3 - (n-1)^3$

$= n^3 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1)$

$= 3n^2 - 3n + 1$ …①

$S_n = n^3$

$n = 1$ のとき、 $a_1 = S_1 = 1$ より、①をみたすので、

$a_n = 3n^2 - 3n + 1 \quad (n \geq 1)$