【問題】

三角形 OAB において, 辺 OA の中点を M, 辺 OB を 2 : 1 に内分する点を N とするとき, AN と BM の交点を P とする。
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき, $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

☆ 点Pが直線AB上

$$\Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB} \\ \text{または} \\ \overrightarrow{OP} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} \end{cases}$$

AP:PN = s:1-s , BP:PM = t:1-t とする

$\overrightarrow{OP} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{ON} = (1-s)\vec{a} + \frac{2}{3}s\vec{b}$ …①

$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OM} + (1-t)\overrightarrow{OB} = \frac{t}{2}\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ …②

$\vec{a}, \vec{b}$ は1次独立であり、①、②より

$1-s = \frac{t}{2}$, $\frac{2}{3}s = 1-t$

なので、$s = \frac{3}{4}$, $t = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

【問題】

$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ とするとき, 次の値を求めよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ

(3) $|3\vec{a}+2\vec{b}|$

☆ 内積の問題 (成分表記ではない)

$\Longrightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表して展開し, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ に分解する

☆ ベクトルでなす角

$$\Longrightarrow \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

☆ $|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}|$

$\Longrightarrow$ 2乗して展開

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$

両辺を2乗して,

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7$

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ より,

$2^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2=7$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

(2) 内積の定義より,

$(\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)$

$3=2\times3\times\cos\theta$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より, $\theta=\frac{\pi}{3}$

(3) $|3\vec{a}+2\vec{b}|^2$

$=9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=9\times2^2+12\times3+4\times3^2$

$=108$

$|3\vec{a}+2\vec{b}|\geqq0$ なので

$|3\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$

【問題】

$\vec{a}=(3,\ -1),\ \vec{b}=(1,\ 2),\ \vec{c}=(-2,\ 3)$ のとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{c}$ が平行となるときの t の値を求めよ。

(2) $\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{c}$ が垂直になるときの t の値を求めよ。

☆ $\vec{a}=(x_1,\ y_1),\ \vec{b}=(x_2,\ y_2)$ の内積および大きさ

$$\Longrightarrow \begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2 \\ |\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2} \end{cases}$$

☆ $\vec{a}\ /\!/\ \vec{b}$ となる条件

$\Longrightarrow \vec{a}=k\vec{b}$

☆ $\vec{a}\perp\vec{b}\ \ (\vec{a}\neq 0,\ \vec{b}\neq 0)$ となる条件

$\Longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

(1) $\vec{a}=(3,-1)$、$\vec{b}=(1,2)$、$\vec{c}=(-2,3)$

$\vec{a}+t\vec{b}=(3,-1)+t(1,2)$

$=(t+3,\ 2t-1)$

$(\vec{a}+t\vec{b})\ /\!/\ \vec{c}$ より $\vec{a}+t\vec{b}=k\vec{c}$ (kは実数)

$(t+3,\ 2t-1)=(-2k,\ 3k)$

より $\begin{cases} t+3=-2k \\ 2t-1=3k \end{cases}$ $\quad 2(-2k-3)-1=3k$

$-4k-6-1=3k$

$k=-1$

kを消去して、tを求めると,

$t=-1$

(2) $(\vec{a}+t\vec{b})\perp\vec{c}$ なので、$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{c}=0$

$(t+3,\ 2t-1)\cdot(-2,3)=0$

$(t+3)\cdot(-2)+(2t-1)\cdot 3=0$

$-2t-6+6t-3=0$

$t=\frac{9}{4}$

【問題】

3 点 A(1, 2, −1), B(−1, 3, 1), C(0, 3, −1) がある。

(1)　四角形 ABCD が平行四辺形であるとき, 点 D の座標を求めよ。

(2)　∠BAC を求めよ。

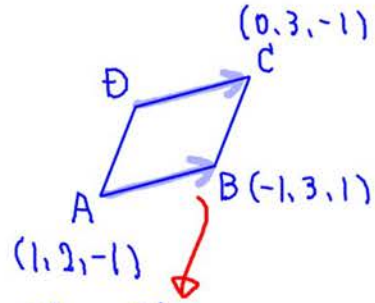
☆ $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ の内積および大きさ

$$\Longrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\ |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \end{cases}$$

☆ ベクトルでなす角

$$\Longrightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(1)



D(x,y,z)とおく, $\vec{AB} = \vec{DC}$ より,

$(-2, 1, 2) = (-x, 3-y, -1-z)$

$\begin{cases} -2 = -x \\ 1 = 3-y \\ 2 = -1-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$

$\therefore$ D(2, 2, −3)

(2) $\vec{AB} = (-2, 1, 2)$, $\vec{AC} = (-1, 1, 0)$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-2)\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 = 3$

$|\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$

$|\vec{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ なので,

内積の定義より

$3 = 3 \times \sqrt{2} \times \cos\angle BAC$

$\cos\angle BAC = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \angle BAC \leqq \pi$ より, $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$

【問題】

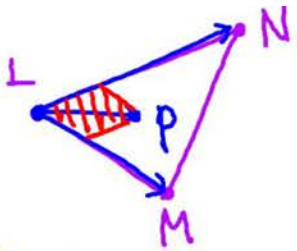
四面体 OABC の辺 OA の中点を L, 辺 OB を 1 : 3 に内分する点を M, 辺 OC を 3 : 1 に内分する点を N, 三角形 ABC の重心を G とし, 直線 OG が三角形 LMN と交わる点を P とする。$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を用いて表し OP : PG を求めよ。

☆ 点 P が直線 AB 上

$$\Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB} \\ \text{または} \\ \overrightarrow{OP} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} \end{cases}$$

☆ 点 P が平面 ABC 上

$$\Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \\ \text{または} \\ \overrightarrow{OP} = (1-s-t)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \end{cases}$$



3点 O, P, G が一直線上より, k を実数として,

$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OG} = k \cdot \dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$ …①

4点 P, L, M, N が同一平面上より, s, t を実数として

$\overrightarrow{LP} = s\overrightarrow{LM} + t\overrightarrow{LN}$

$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OL} = s(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL}) + t(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OL})$

$\overrightarrow{OP} = (1-s-t)\overrightarrow{OL} + s\overrightarrow{OM} + t\overrightarrow{ON}$

$= \dfrac{1}{2}(1-s-t)\overrightarrow{OA} + \dfrac{s}{4}\overrightarrow{OB} + \dfrac{3}{4}t\overrightarrow{OC}$ …②

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は1次独立であり, ①, ② より,

$\dfrac{k}{3} = \dfrac{1}{2}(1-s-t)$

$\dfrac{k}{3} = \dfrac{s}{4}$, $\dfrac{k}{3} = \dfrac{3}{4}t$

$s = \dfrac{4}{3}k$, $t = \dfrac{4}{9}k$

$\dfrac{k}{3} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{4}{3}k - \dfrac{4}{9}k\right)$

$6k = 9 - 12k - 4k$

$22k = 9 \quad \therefore k = \dfrac{9}{22}$

これより, $k = \dfrac{9}{22}$

$\overrightarrow{OP} = \dfrac{9}{22}\overrightarrow{OG} = \dfrac{3}{22}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

であり, OP : PG = 9 : 13