Ⅰ 次の問いに答えなさい。ただし，$\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}7=0.845$ とする。

(1) $\log_{10}35$ を求めなさい。

(2) $2^{5n+1}>35^n$ となる最大の自然数 n を求めなさい。

Ⅱ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある。

$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n+27n$（$n\geqq 1$）

$b_n=a_n+9n$（$n\geqq 1$）

(1) b_{n+1} を b_n の式で表しなさい。

(2) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めなさい。

Ⅲ 関数 $f(x)=2x^3-2(a+1)x^2-(a+3)x$ は，$x=a$ で極値 -36 をとる。ただし，a は定数とする。

(1) a の値を求めなさい。

(2) $y=f(x)$ のグラフを描きなさい。

(3) $f(x)=-28$ となる x の値をすべて求めなさい。

講評

(1) $x=a$ で極値 -36 をとることから，関数 $f(x)$ は以下の条件 (i), (ii) を満たす。

$$\text{(i) } f'(a)=0, \qquad \text{(ii) } f(a)=-36$$

(i) $f'(a)=0$: $f'(x)=6x^2-4(a+1)x-(a+3)$ だから，

$$f'(a)=2a^2-5a-3$$

したがって，

$$2a^2-5a-3=0 \iff (2a+1)(a-3)=0$$
$$\iff a=-\frac{1}{2},3$$

(ii) $f(a)=-36$: $f(a)=-3a^2-3a$ より，

$$-3a^2-3a=-36 \iff (a-3)(a+4)=0$$
$$\iff a=3,-4$$

条件 (i), (ii) が両方とも成り立たなければならないため，求める a の値は，

$$a=3$$

(2) $a=3$ より，関数 $f(x)$ は

$$f(x)=2x^3-8x^2-6x$$

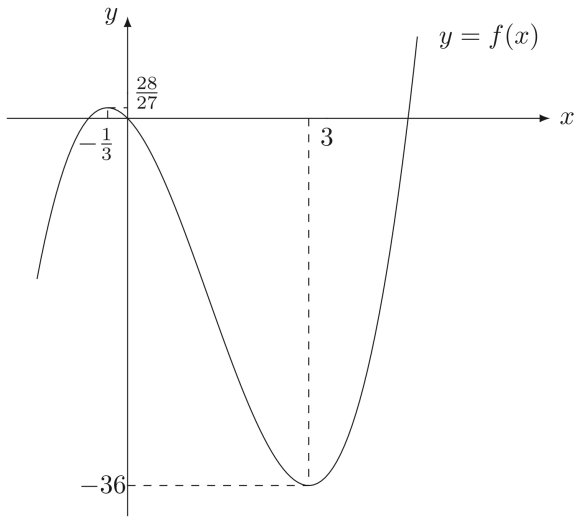
よって，

$$f'(x)=6x^2-16x-6=2(3x+1)(x-3)$$

であるから，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{28}{27}$	↘	-36	↗

したがって，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる。



(3) $f(x)=2x^3-8x^2-6x$ より，

$$f(x)=-28 \iff 2x^3-8x^2-6x+28=0$$
$$\iff x^3-4x^2-3x+14=0$$

$g(x)=x^3-4x^2-3x+14$ とおくと，$g(2)=0$ であるので，$g(x)$ は $x-2$ で割り切れる。割り算を実行して

$$g(x)=(x-2)(x^2-2x-7)=0$$

であるから

$$x=2,\ 1\pm2\sqrt{2}$$

（注意）問 (1) で関数 $f(x)$ は条件 (i), (ii) の両方を満たすことに気をつけよう．また，問 (2) でグラフを描くときは増減表をしっかりと書くようにしよう。