

試験日 : 2024年7月6日(土)

入試種別 : 2025年度 編転入学試験問題

学部・研究科: 先端理工学部 機械工学・ロボティクス課程

科目名 : 専門 I

解答又は解答例

数学分野

問 1

2重積分の値を求める.

$$\begin{aligned} & \iint_D xy dx dy \\ &= \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy dy = \int_0^a x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int_0^a x \frac{a^2-x^2}{2} dx \\ &= \int_0^a \frac{a^2x-x^3}{2} dx = \left[\frac{a^2x^2}{4} - \frac{x^4}{8} \right]_0^a = \frac{a^4}{8} \end{aligned}$$

問 2

積の関数の導関数を求める.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \log(x^2+1) + x \frac{1}{x^2+1} 2x \\ &= \log(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1} \end{aligned}$$

問 3

二変数 x, y の関数の偏導関数を求める.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 2y = 2(3x + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y = 2(x + y)$$

問4

行列の積, 逆行列などを求める.

(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 3+8 \\ 3+8 & 9+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(3)

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2 + 20} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(4)

固有方程式から固有値 λ を求める.

$$|A - \lambda E| = \left| \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$(4 - \lambda)(1 - \lambda) - (-2) \times 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\text{固有値 } \lambda = 2, 3$$

固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルを $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$ とおき, $(A - \lambda E)\vec{x} = 0$ に代入

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$x_{11} = x_{21}$$

以上より, 固有ベクトルは $\vec{x}_1 = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる. ただし, t_1 は 0 でない実数.

固有値 $\lambda = 3$ に対応する固有ベクトルを $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$ とおき, $(A - \lambda E)\vec{x} = 0$ に代入

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$x_{12} - 2x_{22} = 0$$

以上より, 固有ベクトル $\vec{x}_2 = t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる. ただし, t_2 は 0 でない実数.

物理分野

問 1

(1) 運動量 $p = mv = 800 \times 14 = 11,200 \text{ kgm/s}$

(2) 力学的エネルギー保存則より, $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh, v_0^2 = 2gh, h = \frac{v_0^2}{2g}$

問 2 力積の大きさは、運動量の変化量に等しい.

$$\text{力積 } \vec{F} \text{ の大きさ } |\vec{F}| = |\vec{p}_1 - \vec{p}_0| = mV$$

問 3 $W = \int_0^a F_x dx + \int_a^0 F_y dy = \int_0^a y dx + \int_a^0 2x dy = \int_0^a (a-x) dx + \int_a^0 2(a-y) dy$

$$= \int_0^a a dx - \int_0^a x dx + \int_a^0 2a dy - \int_a^0 2y dy$$

$$= [ax]_0^a - \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^a + [2ay]_a^0 - [y^2]_a^0 = a^2 - \frac{1}{2}a^2 - 2a^2 + a^2 = -\frac{1}{2}a^2$$

仕事の大きさは $\frac{1}{2}a^2$ (終)