

試験日 : 2025 年 9 月 13 日 (土)

入試種別 : 大学院入学試験(4 月入学)修士課程 秋期試験

学部・研究科 : 先端理工学研究科 数理・情報科学コース

科目名 : 専門科目 (A.数理解析)

解答又は解答例

A1

(1) $\dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rank} A = 2$. $\operatorname{Im} A$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ として

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が選べる. 実際

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{v}_1.$$

(2) $U := \mathbb{R}^3, V := \mathbb{R}^3$ とおくと A は線形写像 $U \rightarrow V$ と同一視できる. 次元定理より

$$\dim U = \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rank} A.$$

よって, $\dim \operatorname{Ker} A = \dim U - \operatorname{rank} A = 3 - 2 = 1$. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解くと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

つまり, $\operatorname{Ker} A$ の基底として,

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が選べる.

(3) $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ より固有方程式

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda) \\ = -\lambda(\lambda - 2)^2 = 0$$

を解くと, 固有値 $\lambda = 2, 0$ が求められる(ただし, $\lambda = 2$ は重解). 対応する固有ベクトルは, 順に $\lambda = 2$ のとき

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 2 & -4 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 2 & 1 & -2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けば

$$\mathbf{u} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}: s \neq 0.$$

$\lambda = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けば

$$\mathbf{u} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}: s \neq 0.$$

A2

(1) $|\sin 1/x| \leq 1$ より

$$|f(x) - f(0)| = x^2 \left| \sin \frac{1}{x} \right| \\ \leq x^2.$$

よって, $x \rightarrow 0$ のとき, 右辺は0に収束するので, はさみうちの原理より

$$|f(x) - f(0)| \rightarrow 0.$$

すなわち, f は $x = 0$ で連続.

(2) $x = 0$ における変化の割合について, $h \in \mathbb{R}: h \neq 0$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} \\ &= h \sin \frac{1}{h}. \end{aligned}$$

よって, $h \rightarrow 0$ のとき, はさみうちの原理より 右辺は 0 に収束するので

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} \rightarrow 0.$$

よって, f は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = 0$.

(3) $x \neq 0$ のとき,

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - x^2 (-x^{-2}) \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}.$$

$x \rightarrow 0$ のとき,

$$2x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

だが

$$\cos \frac{1}{x}$$

が振動するので, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ は存在しない. よって $x = 0$ で連続微分可能ではない.

A3[1]

(1) 斉次方程式 $x_c'' + x_c' - 6x_c = 0$ について, 特性方程式 $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ より

$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$ なので, $\lambda = 2, -3$. よって, 斉次方程式の一般解は

$$x_c(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}.$$

次に, 非斉次方程式

$$x'' + x' - 6x = e^{2t}$$

の 1 つの解 x_p を $x_p(t) = Ate^{2t}$ から構成すれば,

$$x_p'(t) = Ae^{2t} + 2Ate^{2t},$$

$$x_p''(t) = 2Ae^{2t} + 2Ae^{2t} + 4Ate^{2t}.$$

よって, A が

$$\{(4At + 4A) + (A + 2At) - 6At\}e^{2t} = e^{2t}$$

を満たせばよいので, $A = 1/5$ を得る. 以上により, 非斉次方程式の一般解は

$$x = x_c + x_p = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} + \frac{1}{5}te^{2t}.$$

(2) 斉次方程式 $x_c''' + 6x_c'' + 12x_c' + 8x_c = 0$ について, 特性方程式 $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = 0$ より, $(\lambda - 2)^3 = 0$ なので, $\lambda = 2$. よって, 斉次方程式の一般解は

$$x_c(t) = (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^{-2t}.$$

次に, $x''' + 6x'' + 12x' + 8x = 4t^2 + 4t + 2$ の 1 つの解を x_p とおくと山辺の方法より

	$\frac{1}{2}t^2$	$-t$	$+1$
$8 + 12D + 6D^2 + D^3$	$4t^2$	$+4t$	$+2$
	$4t^2$	$+6 \cdot 2t$	$+3 \cdot 2$
		$-8t$	-4
		$-8t$	-12
			8
			8
			0

従って, $x_p(t) = (1/2)t^2 - t + 1$. 以上により, 非斉次方程式の一般解は

$$x = x_c + x_p = (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 - t + 1.$$

A3[2]

(1)

$$A^i = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\},$$

$$\partial A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y \in \{0, 1\}\} \cup \{(x, y) \mid x \in \{0, 1\}, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$\overline{A} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$B^i = \emptyset,$$

$$\partial B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \text{ただし } x, y \text{ は有理数}\} = B,$$

$$\overline{B} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

(2) $x \in (C \cap D)^i$ とおく. 内点の定義よりある $\varepsilon_x > 0$ が存在して

$$N(x; \varepsilon_x) \subset C \cap D.$$

よって,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset C \quad \text{かつ} \quad N(x; \varepsilon_x) \subset D$$

つまり, $x \in C^i$ かつ $x \in D^i$ となり

$$x \in C^i \cap D^i.$$

ゆえに

$$(C \cap D)^i \subset C^i \cap D^i$$

が成立.

$x \in C^i \cap D^i$ とおく. 共通部分の定義より $x \in C^i$ かつ $x \in D^i$. 内点の定義よりある $\varepsilon_C, \varepsilon_D > 0$ が存在して

$$N(x; \varepsilon_C) \subset C \quad \text{かつ} \quad N(x; \varepsilon_D) \subset D.$$

ここで, $\varepsilon_x := \min\{\varepsilon_C, \varepsilon_D\}$ とおくと, $\varepsilon_x > 0$ でさらに

$$N(x; \varepsilon_x) \subset N(x; \varepsilon_C) \subset C \quad \text{かつ} \quad N(x; \varepsilon_x) \subset N(x; \varepsilon_D) \subset D.$$

つまり,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset C \cap D.$$

ゆえに, $x \in (C \cap D)^i$ となり,

$$(C \cap D)^i \supset C^i \cap D^i$$

が成立.

以上より等号が成立.